

FARKAS KÁROLY

Görbék genezise szuperpozícióval

Dinamikus görbekonstrukciók Logo-alapú mikrovilágban

<https://doi.org/10.71157/upsz.2026.03-04.08>

1. BEVEZETÉS – A GÖRBÉK MINT FOLYAMATOK

A matematikaoktatásban a görbék fogalma többnyire egyenletekhez, grafikonokhoz vagy kész rajzokhoz kötődik. Ez a szemlélet a görbét lezárt objektumként kezeli, miközben elrejt azok dinamikus geneziséjét. A tanuló gyakran csak az eredménnyel találkozik, nem pedig azzal a folyamattal, amely a görbe létrejöttéhez vezet.

Munkánk alapállítása, hogy a görbék megértése akkor válik természetessé, ha a tanuló nem a kész alakzattal, hanem az azt létrehozó mozgásokkal találkozik. A Logo-pedagógia (Papert, 1980) erre kivételesen alkalmas közeget teremt, mert – ahogy majd látni fogjuk – a mozgás, az időbeliség és az algoritmikus gondolkodás eleve integrált módon jelenik meg benne. A genezis elsődlegesebb, mint a görbét leíró képlet; a keletkezés megelőzi a formális leírást.

A Logo-pedagógia a konstruktivista tanulásméltre épülő megközelítés, amelyet Seymour Papert dolgozott ki, és amelyben a tanulók aktív alkotás, aktív tapasztalatok során sajátítják el a tudást, leggyakrabban a Logo programozási nyelv használatával. Ennek egyik központi eszköze a teknőcgeometria, ahol egy „teknőc”, ideális esetben egy robot, és/vagy a diák önmaga a térben

mozogva, végül az alkotó képernyőn a kurzor mozgását irányítva egyszerű parancsokkal rajzolnak alakzatokat, miközben intuitívan értik meg a geometriai fogalmakat. A módszer nemcsak a matematikai készségeket fejleszti, hanem a problémamegoldó gondolkodást, kreativitást is, illetve algoritmikus szemléletet is kialakít, mivel a tanulók saját kísérleteik és hibáik révén jutnak el a megoldásokhoz.

A teknőcgeometria ebben az értelemben nem rajzolás, hanem dinamikus geometria: a görbe a mozgás nyoma, az időbeli szerveződés lenyomata. Ez a szemlélet szoros kapcsolatban áll a modern számítógépes gondolkodással és a mesterségesintelligencia-alapú modellezéssel, ahol a hangsúly szintén az eljárásokon és a folyamatokon van.

2. ELMÉLETI HÁTTÉR – SZINTÓNIA ÉS LOGO-PEDAGÓGIA

Emergensnek nevezzük azokat az alakzatokat vagy jelenségeket, amelyek egyszerű folyamatok kölcsönhatásából jönnek létre, ám a végeredmény olyan új minőséget mutat, ami csupán az egyes részfolyamatok leírásából nem kikövetkeztethető. A teknőcgeometriában a görbék tipikusan ilyen emergens módon jelennek meg: nem előre

definiált objektumokként, hanem mozgások szuperpozíciójának eredményeként.

A Logo-pedagógia egyik alapfogalma a szintónia (syntonicity), amely a tanuló és az általa megismert jelenség közötti természetes azonosulást jelenti. A klasszikus megkülönböztetések szerint beszélhetünk testi szintóniáról (body-syntonic), amikor a teknőc mozgása megfeleltethető testi mozgásoknak, valamint én-szintóniáról (self-syntonic), amikor a programozó vagy a tanuló könnyen azonosul a teknőccel.

Jelen munkában ezt a szemléletet két további irányban bővítjük. Egyrészt didaktikai szintóniáról beszélünk, amikor a tananyag belső szerkezete, az elsajátítás javasolt módja, üteme követi a tanuló gondolkodásának természetes útját. Másrészt a szociális szintónia fogalmát vezetjük be, amelyben több, egymással kapcsolatban álló szereplő együttműködése modellál komplex matematikai jelenségeket.

3. A PARADICSOMI MIKROVILÁG MINT MODELLRENDSZER

A *Paradicsomi mikrovilág* a szerző által kialakított és 2003-tól alkalmazott Logo-alapú modellrendszer (Farkas, 2011), amelyben a szereplők nem pusztán narratív figurák, hanem jól meghatározott funkcióval rendelkező objektumok. Ádám és Éva elemi mozgásokat végeznek, míg Káin nem új mozgást hoz létre, hanem más szereplők viselkedését összegzi (1. ábra).

Káin ebben az értelemben a szuperpozíció operatív megtestesítője: mozgása mindig eredő, soha nem elemi. A szereplők elnevezései nem metaforikus díszítések, hanem a szerepek stabil azonosítását és a tanulói azonosulást szolgáló didaktikai eszközök.

A Paradicsomi mikrovilágban a teknőcök paramétereiket „hátságjukban” hordozzák, ami módszertanilag is jól kezelhetővé teszi a kísérletezést.

1. ÁBRA

Három szereplő



FORRÁS: saját szerkesztés

4. SZUPERPOZÍCIÓ LOGO-KÖRNYEZETBEN

Logo-környezetben a szuperpozíció legegyszerűbb módon eljárások egymás utáni vagy kvázi parallel futtatásával valósul meg. Ha két független mozgás :a és :b, akkor az eredő mozgás egyszerűen ezek gyorsan egymást váltogató, iterált végrehajtásából áll össze, amely az észlelés szintjén párhuzamos

mozgásként jelenik meg. Nem valódi párhuzamosságról van szó, hanem olyan gyors egymásutániságról, amely a megfigyelő számára párhuzamos mozgás benyomását kelti. Ez a megközelítés lehetővé teszi az emergens alakzatok kialakulásának közvetlen megfigyelését és tapasztalati megértését.

A szuperponálás alappéldája a kör genezise, ahol az egységnyi előrelépés és az egységnyi elfordulás együttese önmagába záródó pályát, kört eredményez (2. ábra).

2. ÁBRA

Három teknőc nyoma kör genezise során



FORRÁS: saját szerkesztés

5. CIKLOIS TÍPUSÚ GÖRBÉK GENEZISE

A ciklois típusú görbék egy haladó (transzlációs) és egy forgó mozgás összetételéből jönnek létre. Ha egy kör egyenes mentén gördül, nyitott cikloist kapunk; ha egy kör egy másik körön gördül (kívül vagy belül), zárt görbék – epi- vagy hipocikloisok – keletkeznek. A Paradicsomi mikrovilágban mindkét eset jól modellezhető: a görbe nem

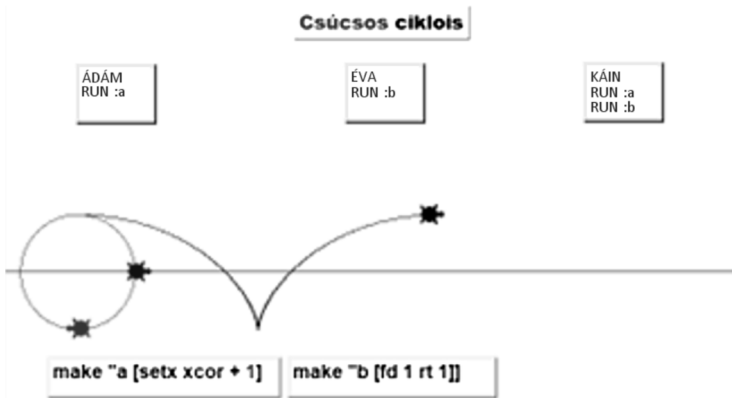
közvetlen rajzolás eredménye, hanem a mozgások természetes következménye.

A haladó mozgás jelen esetben körpályán történő mozgás (*a* jelű), amelyre egy forgómozgás (*b* jelű) tevődik rá (lásd 3. ábra).

Csúcsos ciklois akkor jön létre, amikor a haladó mozgás és a forgómozgás aránya olyan, hogy egy teljes körfordulat ideje alatt a haladó mozgás által megtett út megegyezik a gördülő kör kerületével.

3. ÁBRA

Csúcsos ciklois genezise



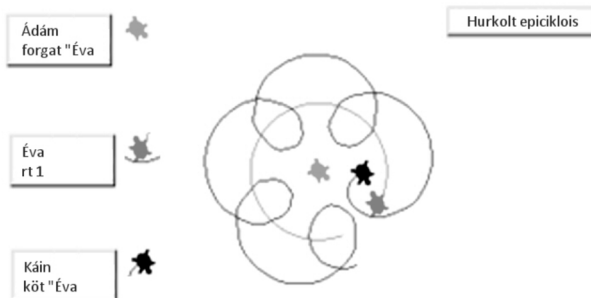
FORRÁS: saját szerkesztés

Zárt ciklois akkor jön létre, amikor a kör nem egyenes mentén, hanem egy másik körön gördül. Ilyenkor epi- vagy hipociklois keletkezik. A görbe akkor zárt, azaz önmagába visszatérő, ha az álló (irányító) és a gördülő kör sugarának aránya racionális szám.

A Paradicsomi mikrovilágban ez tiszta módon modellezhető: a „hordozó” teknőc körpályán mozog, miközben egy másik teknőc forgását közvetíti. Az eredmény zárt, periodikus ciklois görbe (4. ábra).

4. ÁBRA

Hurkolt epiciklois genezise



FORRÁS: saját szerkesztés

6. A SZINUSZGÖRBE MINT EREDŐ PÁLYA

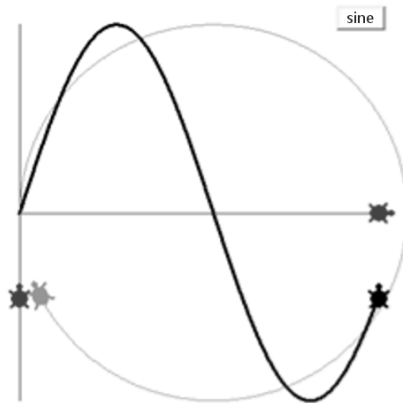
A szinuszgörbét modellünkben nem függvénygrafikonként, hanem pályaként értelmezzük. Ádám egyenes mentén halad, Éva harmonikus kitérést végez erre merőlegesen,

Káin pedig e két mozgás szuperpozícióját rajzolja meg. A szinusz így nem képletből, hanem mozgások összekapcsolásából születik.

Ez a szemlélet didaktikailag alapvető váltást jelent: a tanuló a harmonikus mozgást nem absztrakt függvényként, hanem átélhető dinamikusan folyamatként tapasztalja meg. (5. ábra)

5. ÁBRA

Szinuszgörbe genezise négy teknőc mozgásával



FORRÁS: saját szerkesztés

Éva harmonikus rezgést végez (oszillál). A körmozgás bármely, az átmérővel párhuzamos egyenesre vett vetülete harmonikus rezgés. Ez az az értelmezés, amelyet szintónikus (összhangalapú) megközelítésként tanítunk a diákjainknak. Az eljárásunk a következő:

```
Sup [setx xcor + 1 Lucifer, fd 1.57 rt .5]
[harmonic "Lucifer]
to harmonic :Mrx
sety ask :Mrx [ycor]
end
```

Az Éva-Lucifer párosra kizárólag a harmonikus mozgás keletkezésének magyarázatához volt szükség. A modell leegyszerűsíthető: Lucifer elhagyható, ha Éva körmozgást végez, és Káin ennek a körmozgásnak a harmonikus vetületét veszi.

```
to sine
sup [setx xcor + 1 Eva, fd 1.57 rt .5]
[harmonic "Eva]
end
```

A görbe két teknőccel is generálható (ld. 6. ábra).

6. ÁBRA

Színuszgörbe mint lineáris és harmonikus mozgás szuperpozíciója

FORRÁS: saját szerkesztés



Két teknőc (t1 és t2) is elegendő a szinuszgörbe előállításához. A teljes konstrukció egyetlen egysoros Logo-paranccsal megvalósítható:

```
repeat 360 [t1 fd 1 rt 1 t2 setx xcor + 1
sety ask "t1 [ ycor ]]
```

Az első teknőc körmozgást végez, tollát nem tesszük le. A második teknőc ugyanarra a kiindulóponttra kerül, tollát letesszük, és minden lépésben átveszi az első teknőc aktuális függőleges koordinátáját, miközben vízszintesen halad előre.

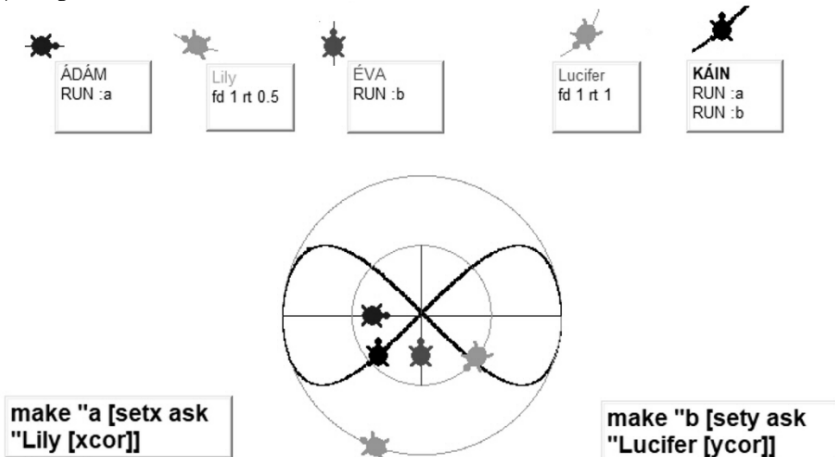
t1 nem rajzol, a második teknőc egy teljes periódusú szinuszgörbét húz. A matematikai forma ebben az esetben sem számítás eredménye, hanem mozgások összekapcsolásából születő geometriai jelenség.

7. LISSAJOUS-GÖRBÉK GENEZISE A PARADICSOMI MIKROVILÁGBAN

A Lissajous-görbék két egymásra merőleges harmonikus mozgás szuperpozíciójaként jönnek létre. A Paradicsomi mikrovilágban ezt **koordináta-delegálással** (koordináta-mentes /intrinzikus/ leírás) valósítjuk meg:

7. ÁBRA

Lissajous-görbe



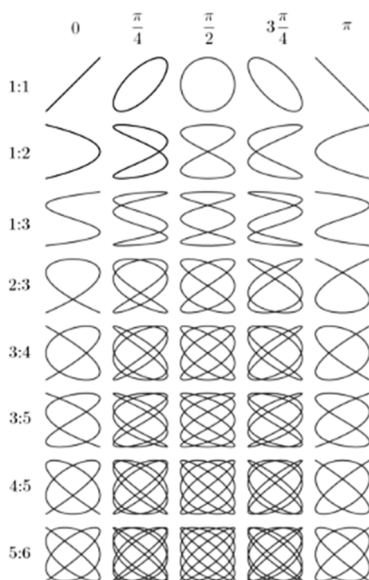
FORRÁS: saját szerkesztés

make "a [setx ask "Lily [xcor]]
make "b [sety ask "Lucifer [ycor]]

Ádám és Éva külön-külön harmonikus komponenseket szolgáltatnak, Káin pedig ezek szuperponálásával rajzolja meg az eredő görbét.

8. ÁBRA

Lissajous-görbék alakváltozása különböző frekvenciaarányoknál



FORRÁS: saját szerkesztés

A frekvenciaarány változtatásával a görbe alakja természetes módon módosul. Ádám és Éva két további mellékszereplőtől veszik át pillanatnyi helyzetüket meghatározó paramétereiket.

Az Elica Logo¹ gömbteknőcének alkalmazásával a mozgások szuperpozíciója térben is értelmezhető. A teknőc a gömb felszínén, tehát egy zárt kétdimenziós felületen

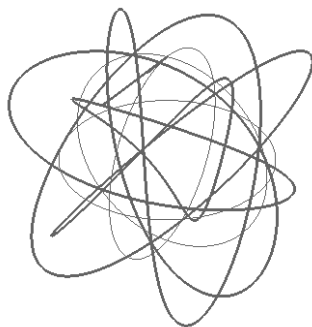
mozog, így a pályák periodikus szerkezete a síkbeli Lissajous-görbe analógiájaként jelenik meg, de a gömb geometriájához kötöten. Ez a megközelítés a síkbeli analízis geometriai-topológiai szemlélettel egészíti ki, mivel a mozgásokat nem síkban, hanem zárt felületen vizsgáljuk.

A Lissajous-görbe vastag vonal. A halványabb három ellipszis a főkörök képe.

¹ Az új Elica Logo személyes véleményem szerint pedagógiai szempontból a legjobb Logo-verzió. Pável Bojcssev alkotása, aki többféle tulajdonsággal rendelkező teknőcöket használ. Talán a leginkább figyelemre méltó ezek közül, hogy teknőcei három dimenzióban mozoghatnak, és repülhetnek is.

9. ÁBRA

3D Lissajous-görbe *Elica Logo* gömbteknőccel



FORRÁS: saját szerkesztés

8. KÖVETKEZTETÉSEK

A bemutatott modellek azt igazolják, hogy a görbék genezisének mozgások szuperpozícióján alapuló megközelítése nemcsak matematikailag korrekt, hanem pedagógiailag is rendkívül hatékony. A Paradicsomi mikrovilág olyan fogalomképző közeg, amelyben a tanuló aktív alkotóként vesz részt a matematikai jelenségek feltárásában.

A cikkben szereplő Logo-kódok nem pusztán illusztrációk, hanem a görbék genezisének formális leírásai. A hangsúly a folyamatokon, nem a kész alakzatokon van. Ez a szemlélet természetes hidat képez a klasszikus geometria, a számítógépes

gondolkodás és a mesterségesintelligencia-alapú modellezés között.

MÓDSZERTANI MEGJEGYZÉS

A tanulmány elkészítése során mesterséges intelligencián alapuló nyelvi eszköz is közreműködött. Az eszköz szerepe nem tartalmi döntéshozatal vagy tudományos állítások megfogalmazása volt, hanem a szöveg strukturálásának, pontosításának és stílusi tisztításának támogatása. Az alkotói koncepció, a didaktikai modell és a matematikai gondolatmenet a szerző önálló munkájának eredménye; az alkalmazott eszköz ebben a folyamatban hatékony, de alárendelt segédeszközként működött közre.

IRODALOM

- Abelson, H. és diSessa, A. (1986): *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Farkas K. (2011): *Játékos teknőgeometria*. Szak, Bicske.
- Papert, S. (1980; 1993): *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books, New York.